53 函數ノ多葉性ニ就テ II

尾崎 繁雄 (東京文理大)

單葉函数ニ就テ次ノ結果ハヨク知ラレテヰル。

$f(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ ニ於ケル正則單葉函数トスレバ

$|a_2|\leqq 2$, $|a_3|\leqq 3$, $|a_4|\leqq 4.546\cdots$, $|a_5|<6.701\cdots$ $|a_n|<en$

ナル関係ガアル。一般ニ $|a_n|\leqq n$ デアラウト云フノガびーべるばっはノ豫想デアル。同様ニ次ノ定理モ成立スル。

定理 $g(z)=z^k+b_{k+1}z^{k+1}+\cdots+b_{k+n}z^{k+n}+\cdots$ ヲ $|z|<1$ ニ於ケル正則k葉函数トスレバ

$$|b_{k+1}|\leqq 2k$$

ナルネ等式ガ成立スル。

特ニ $k=1$ トオケバ $|a_2|\leqq 2$ ヲ得ル。

証明ハ單葉函数ノ場合ト同様デアル。即チ

$$G(z)=\sqrt[2k]{g(z^{2k})}=z^k+\frac{b_{k+1}}{2k}z^{3k}+\cdots$$ ハ $|z|<1$ ニ於ケル正則k葉函数デアル。何トナレバ $|z|<1$ ハ z^{2k} ニヨリ原点ヲ $2k$次ノ分岐点ヲ持ツ様ナ$2k$葉ノりーまん面ノ部分ニ從テ又 $g(z^{2k})$ ニヨリ原点ヲ$2k$次ノ分岐点ニモツ様ナ$2k^2$葉ノりーまん面ノ部分ニ描写サレル。故ニ $\sqrt[2k]{g(z^{2k})}$ ニヨリ原点ヲk次ノ分岐点ヲ持ツ様ナk葉ノりーまん面ニ描画サレルカラデアル。

從テ $$\frac{1}{G(z)}=\frac{1}{z^k}-\frac{b_{k+1}}{2k}z^k+\cdots$$ モ亦 $0<|z|<1$ ニ於ケル正則k葉函数デアル。ココデ拡張サレタ面積定理

$$\varphi(z)=\frac{1}{z^k}+\frac{\beta_{k-1}}{z^{k-1}}+\cdots\cdots+\frac{\beta_1}{z}+\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots\cdots+\alpha_n z^n+\cdots$$

ヲ $0<|z|<1$ ニ於ケル正則 k 葉函数トスレバ

$$k+(k-1)|\beta_{k-1}|^2+\cdots\cdots+|\beta_1|^2 \geqq |\alpha_1|^2+2|\alpha_2|^2+\cdots\cdots+n|\alpha_n|^2+\cdots$$

ナル関係ガアル（本紙 16号 44ノ拙論定理3 或ハ 13号 38ノ市原氏論説ヲ参照セラレタシ）" ニヨリ

$$k\left|\frac{b_{k+1}}{2k}\right|^2 \leqq k \qquad 即チ \qquad |b_{k+1}| \leqq 2k$$

以上デ証明ハ終ルノデアルガ尚

$$\varphi(z)=\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\}^k=z^k+2k\,z^{k+1}+\cdots\cdots+\binom{2k+n-1}{n}z^{k+n}+\cdots$$

ガ $|z|<1$ ニ於ケル正則 k 葉函数ナル事ハ容易ニ証明デキルカラ（$\because \frac{z}{(1-z)^2}$ ガ $|z|<1$ ニ於ケル正則単葉函数ダカラデアル）コノ不等式ハコレ以上精密ニスル事ハ出来ナイ。最後ニびーべるばっはノ豫想ヲ拡張シテ一般ニ

$$\left|b_{k+n}\right| \leqq \binom{2k+n-1}{n}$$

ガ成立スルノデハアルマイカ．

（11月 5日 受取）